

微积分基础入门：极限与连续性

专升本资格考试学习资料

科目：高等数学 | 章节：微积分 | 小节：第一节

概述

微积分是高等数学的重要组成部分，涵盖函数的极限、连续性、导数、积分等核心内容，是理解数学分析和应用数学的基石。本节将重点介绍微积分的第一节内容——极限与连续性。掌握极限与连续性的基本概念、计算方法及其理论意义，是学习后续导数和积分的必要前提。

学习目标包括：

- 理解极限的概念及其计算方法
- 掌握函数连续性的定义与判定方法
- 掌握极限与连续性之间的关系
- 通过典型例题熟练应用极限与连续性知识

核心概念

极限

极限是研究函数在某一点附近的行为的数学工具。通俗来说，函数的极限描述的是当自变量无限接近某一点时，函数值趋近于某个确定数的性质。

- 函数极限的定义**：给定函数 $f(x)$ ，若当 x 趋近于某值 a 时， $f(x)$ 趋近于 L ，即对于任意小的正数 ϵ ，都存在一个正数 δ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时， $|f(x) - L| < \epsilon$ ，则称 L 为 $f(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 时的极限，记作 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。
- 左极限与右极限**：函数在某点处的左极限是指 x 从该点左侧趋近时的极限，右极限是指 x 从右侧趋近时的极限。若左极限与右极限相等，则极限存在。

连续性

连续性是函数性质的重要指标，描述函数图像是否存在“断点”。函数在某点连续，意味着函数值与极限值相等，且函数值存在。

- 函数连续的定义**：函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 连续，当且仅当满足：

- $f(a)$ 存在
- 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在
- 极限值等于函数值，即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

- 连续函数的分类**：包括初等连续函数、分段连续函数、间断点类型等。

原理分析

极限的理论基础

极限的定义基于 ϵ - δ 语言，严格阐述了“趋近”的数学意义。极限的存在反映了函数在某点“趋稳”的趋势，而非函数值本身。

极限的计算通常利用代数变形、因式分解、分子分母有理化、洛必达法则和夹逼定理等方法。理解这些工具的原理能帮助灵活解决极限问题。

连续性与极限的关系

连续性本质上是极限的一种特殊情况，函数在点 a 连续意味着极限存在且与函数值相等。若极限不存在或不等于函数值，则不连续。

函数的连续性保证了函数图像的连贯性，是导数和积分存在的前提条件。函数的不连续点称为间断点，间断点类型包括可去间断、跳跃间断和无穷间断。

详细内容

1. 极限的定义与性质

极限的正式定义使用 ϵ - δ 语言，确保理解“函数值无限接近极限值”的严谨性。掌握极限的四大性质：

- 唯一性：极限值唯一
- 有界性：极限存在的函数值在极限附近有界
- 保号性：极限附近函数值符号保持不变
- 四则运算法则：极限的加减乘除运算规则

此外，学习夹逼定理（夹挤定理），利用两函数夹逼一个函数求极限。

2. 计算极限的常用方法

- 直接代入法**：当 $x \rightarrow a$ 且 $f(a)$ 存在时，直接代入计算极限。

- **因式分解法**：利用多项式因式分解消除不定式。
- **有理化法**：对根式表达式进行有理化，消除根号。
- **洛必达法则**：当极限呈现 $0/0$ 或 ∞/∞ 不定形时，通过求导计算极限。
- **无穷大与无穷小的比较**：利用无穷小量的等价替换简化计算。

3. 左极限与右极限

详细介绍左极限和右极限的定义及计算方法，讲解它们在判断极限存在性上的作用。强调极限存在的条件是左、右极限相等。

4. 函数的连续性

- **连续的三条件**：函数值存在、极限存在且两者相等。
- **连续函数的性质**：闭区间上的连续函数有界且达最大最小值；介值定理等。
- **间断点分类**：
 - 可去间断点：极限存在但函数值不等于极限或函数值不存在
 - 跳跃间断点：左右极限存在但不相等
 - 无穷间断点：极限不存在

5. 复合函数与分段函数的极限与连续性

讲解如何求复合函数的极限，利用极限的运算法则和函数连续性判断复合函数的连续性。分析分段函数的连续性判断方法，强调分段点的连续性判定。

实例分析

实例1：计算极限 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2)$

- **背景**：该极限表达式在 $x=2$ 处呈现 $0/0$ 不定形
- **分析**：因式分解分子为 $(x-2)(x+2)$ ，约去 $(x-2)$ ，得到 $\lim_{x \rightarrow 2} x+2 = 4$
- **结论**：极限存在且等于4

实例2：判断函数 $f(x) = \{ x^2, x < 1; 2x + 1, x \geq 1 \}$ 在 $x=1$ 处是否连续

- **背景**：分段函数，需考察分段点连续性
- **分析**：

- 左极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 = 1$
- 右极限 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- 函数值 $f(1) = 3$
- **结论**：左右极限不等，函数在 $x=1$ 处不连续，为跳跃间断点

实例3：利用夹逼定理计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x)$

- **背景**：函数 $x^2 \sin(1/x)$ 在 $x=0$ 处难以直接计算极限
- **分析**：
 - 因为 $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ ，故 $-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$
 - 两边极限均为0，故根据夹逼定理，极限为0
- **结论**： $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x) = 0$

常见误区

1. **误区**：极限值等于函数值才算极限存在。
 - 纠正：极限存在与函数值存在是两个不同概念，极限是函数值趋近的趋势，函数值可不存在极限仍存在。
2. **误区**：左右极限不相等，极限仍然存在。
 - 纠正：极限存在必须左右极限相等。
3. **误区**：函数连续即函数图像没有任何断点。
 - 纠正：连续函数在定义域内无间断点，但分段函数需在分界点判断连续性。
4. **误区**：极限计算时直接代入所有情况都有效。
 - 纠正：代入法仅适用于函数在该点有定义且连续的情况，遇到不定式需用其他方法。
5. **误区**：忽略极限存在的唯一性。
 - 纠正：极限值唯一，不可能有多个不同极限。

应用场景

- **工程学**：分析物理量变化趋势，如速度、加速度的瞬时变化。
- **经济学**：研究边际效应、收益递减趋势，函数连续性反映经济模型的稳定性。
- **计算机图形学**：曲线和曲面光滑处理，连续性保证视觉自然。

- **物理学**：描述连续介质理论，函数连续性是描述物理量连续分布的基础。
- **统计学**：概率密度函数的连续性影响概率计算与模型拟合。

知识拓展

- **无穷小与无穷大的极限**：深入理解无穷小量的比较及其在极限计算中的应用。
- **初等函数极限公式**：掌握常见的极限公式和等价无穷小替换。
- **极限的拓展概念**：如无穷远处的极限、无穷大极限等。
- **连续函数的高级性质**：如一致连续、可微性与连续性的关系。
- **多元函数极限与连续**：初步了解多元函数的极限概念及连续性的复杂性。

总结回顾

本节内容系统介绍了微积分的基础知识——极限与连续性。通过对极限的严谨定义与性质的全面解析，帮助考生掌握如何判断和计算极限。随后，介绍了函数连续性的定义、分类及判定标准，强调极限与连续性的内在联系。通过典型实例，巩固了理论知识的应用能力。常见误区的剖析提醒考生避免理解偏差，确保复习的准确性。最后结合实际应用场景和知识拓展，提升考生对微积分基础理论的整体把握，为后续学习导数和积分奠定坚实基础。

微积分的学习需要理论与实践相结合，建议考生多做习题，理解其数学思想，逐步建立数学分析的逻辑体系。祝你学习进步，顺利通过专升本高等数学考试！

重点知识点

1. 极限的 ϵ - δ 定义及其计算方法
2. 函数极限的唯一性和四则运算法则
3. 左极限、右极限与极限存在的关系
4. 函数连续性的三条件及间断点分类
5. 夹逼定理和洛必达法则的应用
6. 分段函数和复合函数的极限与连续性判断
7. 极限与连续性在实际中的重要应用
8. 常见极限计算误区及纠正方法
9. 连续函数的性质及其数学意义

10. 极限与连续性为导数和积分奠定基础

专升本题库 - 专升本资格考试专业平台

导出时间：2026/7/31 21:03:06