

微积分第二节：函数的极限与连续性深入解析

专升本资格考试学习资料

科目：高等数学 | 章节：微积分 | 小节：第二节

微积分第二节：函数的极限与连续性深入解析

概述

本节内容围绕微积分的基础概念之一——函数的极限与连续性展开。理解极限的定义及性质是掌握微积分理论的关键，连续性的判断则是函数分析的基础能力。通过本节学习，考生将系统掌握极限的计算方法、连续性的判别标准及其在实际问题中的应用，为后续导数与积分的学习奠定坚实基础。

学习目标：

- 理解极限的概念及其数学定义
- 掌握极限的计算技巧与常见方法
- 熟悉函数连续性的判定及类型
- 通过实例加深理解极限与连续性的应用
- 识别并避免常见的极限与连续性误区

核心概念

1. 极限 (Limit)

极限是指函数当自变量趋近于某一点时，函数值无限接近某个确定数的趋势。极限反映函数在某点附近的行为特征。

2. 极限的存在性

函数在某点的极限存在，意味着左极限与右极限相等，且函数趋于同一值。

3. 无穷大与无穷小

无穷大表示函数值无限增长，无穷小表示函数值趋近于零但不为零的量。

4. 连续性 (Continuity)

函数在某点连续，要求函数在该点定义，极限存在且极限值等于函数值。连续性是函数性质中的重要指标。

5. 间断点及类型

间断点是函数不连续的点，分为可去间断、跳跃间断和无穷间断。

原理分析

极限的数学定义

极限的经典定义为：

对任意给定的正数 $\epsilon > 0$ ，存在正数 $\delta > 0$ ，使得当变量 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 。

该定义强调函数值 $f(x)$ 能够任意接近极限 L ，通过严格的 ϵ - δ 语言描述极限的本质。

极限的计算原理

极限计算依赖于代入法、因式分解、洛必达法则、夹逼定理等。核心思想是将复杂函数转化为简单形式，逐步逼近极限值。

连续性的判断依据

函数连续的三个条件：

- 函数在点 x_0 有定义
- 极限
to x_0 的极限存在
- 极限值等于函数值，即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

缺一不可，任一不满足即为不连续。

间断点类型分析

- 可去间断点**：极限存在但函数值未定义或不等于极限
- 跳跃间断点**：左右极限存在但不相等
- 无穷间断点**：极限趋于无穷大或不

详细内容

1. 极限的详细讲解

极限是微积分的起点，描述函数值的“趋近”行为。常见极限包括：

- 当 x 趋近于有限点的极限
- 当 x 趋近于无穷大的极限
- 函数值趋向于无穷大或无穷小

1.1 极限的性质

- 唯一性：极限值唯一
- 保号性：极限附近函数值符号不变
- 四则运算法则：极限运算满足加减乘除的结合性

1.2 极限的计算技巧

- 直接代入法：适用于函数表达式在点处连续的情况
- 因式分解法：解决分子分母同为零的未定式
- 有理化法：处理含根号的表达式
- 洛必达法则：针对 $0/0$ 或 ∞/∞ 型未定式的有效方法
- 夹逼定理：当函数被两个极限相同的函数夹住时，极限存在且相等

1.3 特殊极限

- 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$
- 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x = e$

这些极限为后续导数定义及函数增长分析奠定基础。

2. 连续性的深入解析

连续性是函数性质的重要标志，判断函数是否连续是理解函数图像变化的关键。连续性不仅是理论基础，也是实际应用的核心。

2.1 连续函数的类型

- 初等函数的连续性：多项式、指数、对数、三角函数等在定义域内均连续
- 分段函数的连续性：需检查分界点处的连续性

2.2 连续性的判别方法

通过极限和函数值比较，判断是否满足连续定义

2.3 间断点类型详解

- **可去间断**：通过定义函数值为极限值可补全连续
- **跳跃间断**：左右极限不等，无法简单修正
- **无穷间断**：函数值趋于无穷大，断点较强

2.4 连续函数的性质

- **介值定理**：连续函数在区间内取所有介于函数值之间的数
- **最大值最小值定理**：连续函数在闭区间取得最大值和最小值

3. 极限与连续性的关联

极限是连续的基础，函数的连续性本质上是极限存在且等于函数值。掌握极限才能准确判断连续性。

4. 极限与连续性的应用技巧

- 利用极限计算判断函数是否可连续延拓
- 利用连续性判断函数图像的平滑性和变化趋势

实例分析

案例一：求函数 $f(x)=(x^2 - 1)/(x - 1)$ 在 $x \rightarrow 1$ 处的极限及连续性

背景：分母在 $x=1$ 处为0，函数未定义，需判断极限和是否可延拓为连续函数。

分析：

- 因式分解分子： $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
- 函数可化简为 $f(x) = x + 1$ ($x \neq 1$)
- 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + 1 = 2$
- 函数值 $f(1)$ 未定义，故不连续

结论：函数在 $x=1$ 处有可去间断点，通过定义 $f(1)=2$ ，可使函数在此点连续。

案例二：函数 $g(x)=|x|/x$ 在 $x=0$ 处的极限与连续性分析

背景：绝对值函数分段定义， $x \rightarrow 0$ 处函数形式特殊。

分析：

- 左极限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = (-x)/x = -1$
- 右极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = x/x = 1$

- 左右极限不相等，极限不存在
- 函数在 $x=0$ 处无定义，故不连续

结论：函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处有跳跃间断，不连续。

案例三：函数 $h(x)=\sin x / x$ 在 $x \rightarrow 0$ 处的极限

背景：函数在 $x=0$ 处形式为 $0/0$ ，需判断极限

分析：

- 利用特殊极限 $\lim_{x \rightarrow 0}(\sin x)/x=1$
- 函数在 $x=0$ 处未定义

结论：函数极限存在且为1， $h(x)$ 在 $x=0$ 处有可去间断，可定义 $h(0)=1$ 使其连续。

常见误区

1. **误区一：极限不存在就表示函数值不存在**
 - **正确做法：**函数值和极限是不同概念，函数值可以存在而极限不存在，反之亦然。
2. **误区二：忽视左右极限的区别**
 - **正确做法：**判断极限时必须同时考虑左极限和右极限，二者不等极限不存在。
3. **误区三：连续性只需函数值存在**
 - **正确做法：**连续性要求函数值存在且极限存在，且两者相等。
4. **误区四：直接代入所有极限点**
 - **正确做法：**遇到未定式（ $0/0$ 等）应使用因式分解、洛必达法则等技巧。
5. **误区五：混淆可去间断与跳跃间断**
 - **正确做法：**明确间断点类型，判断是否能够通过定义函数值消除间断。

应用场景

- **工程领域：**机械系统运动分析中，极限用于描述瞬时速度和加速度。
- **经济学：**边际收益计算依赖极限概念，连续性保证经济模型的合理性。
- **物理学：**连续性用于描述物质状态变化，极限描述极端条件下的物理量。
- **计算机图形学：**连续性判断保证曲线与曲面的平滑。
- **生物统计：**极限和连续性帮助理解生物数据的趋势和模型拟合。

知识拓展

- 进一步学习导数的定义，建立在极限基础上
- 探索函数的可微性，连续性是可微性的必要条件
- 研究函数的间断点对积分的影响
- 极限在级数收敛性分析中的应用
- 多元函数极限与连续性概念扩展

总结回顾

本节重点在于理解并掌握函数的极限及连续性两个核心微积分概念。通过严格的数学定义、丰富的计算方法和典型实例，考生能够：

- 准确判断极限的存在与计算极限值
- 辨析各种间断点类型及其特征
- 判断函数的连续性并理解其意义
- 避免常见误区，提高解题准确率
- 理解极限与连续性在实际问题中的广泛应用

掌握本节内容，对于后续微积分学习和专升本考试中的解题有着重要的指导意义。

祝愿各位考生通过系统学习，扎实掌握微积分第二节内容，顺利通过专升本高等数学考试！

重点知识点

1. 极限的严格定义及其数学表达
2. 极限的计算方法：代入法、因式分解、洛必达法则等
3. 函数连续性的判定条件及间断点分类
4. 可去间断点与跳跃间断点的判别与处理
5. 极限与连续性之间的内在联系及应用
6. 典型未定式极限的求解技巧和特殊极限
7. 函数在分界点处的连续性判断
8. 常见极限计算和连续性判断中的误区及纠正
9. 极限和连续性在工程、经济、物理等领域的实际应用

10. 极限与连续性为导数和积分学习奠定基础

专升本题库 - 专升本资格考试专业平台

导出时间：2026/7/31 21:02:41