

线性代数基础与向量空间初步

专升本资格考试学习资料

科目：高等数学 | 章节：线性代数 | 小节：第一节

线性代数基础与向量空间初步

概述

线性代数是高等数学中的重要组成部分，是研究向量、向量空间及其线性变换的数学分支。本节作为“线性代数”的第一节，将重点介绍线性代数的基础知识，包括向量的定义、运算、向量组的线性相关性、向量空间的概念等。掌握这些基础内容对于理解后续的矩阵理论、线性方程组解法、特征值与特征向量等内容至关重要。

学习目标：

- 理解向量及其运算的基本概念。
- 掌握线性相关与线性无关的判定方法。
- 理解向量空间及其子空间的定义。
- 能够运用向量的基本性质解决实际问题。

核心概念

向量

向量是具有大小和方向的量，通常用有序数组表示。向量在几何、物理和工程等领域中有广泛应用。

向量的线性运算

包括向量加法和数乘，满足一定的运算规则。

线性相关与线性无关

- 线性相关**：如果向量组中存在非零系数使得它们的线性组合为零向量，则向量组线性相关。
- 线性无关**：如果只有零系数使线性组合为零向量，则向量组线性无关。

向量空间

满足加法与数乘封闭，且满足八条运算公理的集合称为向量空间。

子空间

向量空间的子集若本身也构成向量空间，则称为子空间。

原理分析

向量的线性运算原理

- 向量加法的交换律和结合律保证了加法的灵活性。
- 数乘分配律确保了向量在数乘后的线性结构不变。

这些运算满足向量空间的公理，保证了向量空间的结构完整性。

线性相关性的判定原理

线性相关性通过解线性方程组来判定。设向量组为 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ ，考虑方程

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

若存在非零系数 (c_i) ，则线性相关；反之线性无关。

向量空间的构造原理

通过定义加法和数乘，并验证运算公理，构造满足特定条件的向量空间。例如， $(\mathbb{R}^n)$ 是最常见的向量空间。

详细内容

1. 向量及其运算

向量的定义：

在实际问题中，向量可表示为有序数对（二维）、有序数组（多维）或几何上的箭头。

运算规则：

- 向量加法： $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$
- 数乘： $(k \mathbf{v}) = (k v_1, k v_2, \dots, k v_n)$

性质：

- 加法交换律： $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u})$

- 加法结合律： $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- 分配律： $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

2. 线性相关与线性无关

定义复述：

- 线性相关：存在非零系数使得线性组合为零向量。
- 线性无关：仅能由零系数组合得到零向量。

判断方法：

- 通过行列式（对方阵）判断。
- 通过解线性方程组。

几何意义：

- 在二维空间中，两个向量线性相关意味着它们共线。
- 三维空间中，三个线性相关向量共面。

3. 向量空间及子空间

向量空间公理总结：

- 加法封闭性
- 数乘封闭性
- 加法交换律、结合律
- 数乘分配律
- 单位元存在
- 逆元存在

子空间判定定理：

子集若非空，并对加法和数乘封闭，则为子空间。

例如， $(\mathbb{R}^3)$ 中所有满足某线性方程的向量集合即为子空间。

4. 向量的基与维数（引入）

基是向量空间中的线性无关向量组，且它们的线性组合能表示空间中所有元素。维数是基中向量的个数。

本节简单介绍，为后续章节深化做准备。

实例分析

实例1：二维向量的线性相关判定

背景：

设有向量 $(\mathbf{v}_1 = (2, 3))$ ， $(\mathbf{v}_2 = (4, 6))$ ，判断它们是否线性相关。

分析：

观察 $(\mathbf{v}_2 = 2 \mathbf{v}_1)$ ，存在非零系数2使得 $(\mathbf{v}_2 - 2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0})$ ，故线性相关。

结论：

$(\mathbf{v}_1)$ 和 $(\mathbf{v}_2)$ 共线，线性相关。

实例2：三维空间中向量组线性无关判定

背景：

向量组 $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ 是否线性无关？

分析：

只有 $(c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0))$ 时，系数 $(c_1 = c_2 = c_3 = 0)$ 满足。无非零解。

结论：

该向量组是三维空间的标准基，线性无关。

实例3：子空间判定

背景：

定义集合 $(W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\})$ ，判断 (W) 是否为 $(\mathbb{R}^3)$ 的子空间。

分析：

- 非空， $((0,0,0) \in W)$
- 加法封闭：若 $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W)$ ，则 $((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) = (u_1 + u_2 + u_3) + (v_1 + v_2 + v_3) = 0 + 0 = 0)$
- 数乘封闭： $(k \mathbf{u})$ 满足 $(k u_1 + k u_2 + k u_3 = k(u_1 + u_2 + u_3) = k \cdot 0 = 0)$

结论：

(W) 是 $(\mathbb{R}^3)$ 的子空间。

常见误区

- 误区：线性相关向量必然指向同一方向。**
 - *正确理解：*线性相关意味着其中一个向量可由其他向量线性表示，可能方向相反或零向量。
- 误区：零向量不影响线性无关性判断。**
 - *正确做法：*包含零向量的向量组必线性相关。
- 误区：向量空间和欧几里得空间等价。**
 - *正确理解：*向量空间概念更广泛，可定义在任意域和元素上。
- 误区：子空间必须包含所有向量空间元素。**
 - *正确理解：*子空间是向量空间的子集，非空且封闭即可。
- 误区：线性无关的向量组一定是基。**
 - *正确做法：*基需同时满足生成整个空间。

应用场景

- **工程问题中的力学分析：*力的分解和合成常用向量运算表达。
- **计算机图形学：*向量空间及线性变换用于图形变换和渲染。
- **经济学模型：*多变量经济模型中变量间的线性相关性分析。
- **数据科学与机器学习：*特征向量和基的概念用于降维和数据表示。
- **物理学中的量子力学：*态空间的向量空间结构是基础。

知识拓展

- **矩阵与线性变换：*矩阵是向量空间之间线性变换的表示工具。
- **秩与维数定理：*向量组的秩与空间维数的关系。
- **正交与正交归一基：*提升基的稳定性和计算效率。
- **特征值与特征向量：*线性变换的本质属性。
- **内积空间：*引入内积定义长度和角度，拓展几何理解。

总结回顾

本节系统介绍了线性代数的基础内容，重点讲解了向量及其运算、线性相关与线性无关、向量空间与子空间等核心概念。通过实例分析深化理解，帮助考生建立扎实的线性代数基础，为后续章节的学习做好准

备。掌握这些基础知识，有助于解决实际问题，理解更复杂的线性代数理论。

重点回顾：

- 向量的定义及加法、数乘的运算性质
- 线性相关与无关的判定方法及其几何意义
- 向量空间的定义及子空间判定
- 典型向量组的线性相关性分析

祝愿考生通过深入学习本节内容，打下坚实的线性代数基础，顺利应对专升本考试中的相关考题。

重点知识点

1. 向量及其线性运算的定义与性质
2. 线性相关与线性无关的判定方法
3. 向量空间及其子空间的概念与判定
4. 线性相关性的几何意义
5. 零向量在线性相关性中的作用
6. 向量空间的加法和数乘封闭性
7. 基与维数的初步理解
8. 典型向量组的线性相关性实例
9. 向量空间在工程和科学中的应用场景
10. 常见误区及正确理解方法